線型代数集中講義
第一回

Matthew J. Holland
matthew-h@is.naist.jp

Mathematical Informatics Lab
Graduate School of Information Science, NAIST

Some useful references

- Properties of vector spaces: Axler (1997, Ch. 1–2)
- Various spaces, more analysis than LA: Luenberger (1968, Ch. 2–3)
- Basic topology of metric spaces: Spivak (1965, Ch. 1), Mendelson (1990, Ch. 2), Rudin (1976, Ch. 1–2)

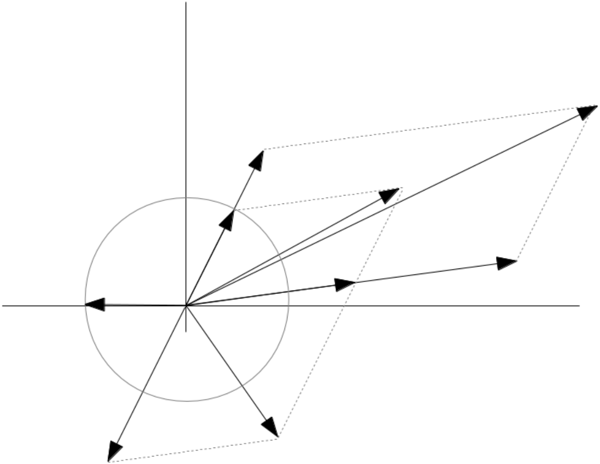
講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

講義内容

1. <u>線型代数の基本的な枠組み</u>
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

直感による動機づけ 1



高校物理でも早くも**ベクトル**と**スカラー**の概念が登場し，幾何的直感は働く．**長さ**や**角度**といった性質，**回転**や**平行移動**といった演算について考察して物理現象を表現.

直感による動機づけ 2

初級の学習においても，以下のような流れはある.

幾何学的に考える　(矢印を描くなど)

$\Downarrow$

代数的に考える (記号を使い，<u>演算を定義する</u>)

いわゆるベクトル解析では，普段どのような演算を定義する？

V + V，S * V，射影，スカラー積，ベクトル積，. . .

物理的な直感を味わいつつ，きちんとした議論をするには，$\mathbb{R}^3$ の元をベクトルに，$\mathbb{R}$ の元をスカラーに取ることが大変有効.

しかし，数学では $\mathbb{R}^3$ 以外にも関心のある空間はいくらでもある.
たとえば $\mathbb{R}^n$ の直感はどうか. $\mathbb{R}^\infty$ は? 関数の空間は?

直感による動機づけ 3

線型代数では，以下のようなことをやっている．

より一般的な空間に対して，先ほどと同様な演算を付与

$\Downarrow$

これらの性質を調べる (=おもしろい定理を証明する)

ここでは公理から入って，かなり一般性のある理論を構築していく．

なぜこれが有益なのか．

証明は一回してしまえば，それで十分だからだ!

要は，$\mathbb{R}^3$ も $\mathbb{R}^\infty$ も $\mathcal{C}[a,b]$ も我々の公理を充たすならば，その公理を使った証明は一瞬にして全部に通じる．

直感的な話は以上である．代数の話に入ろう．

LA の枠組み：スカラーの公理 1

スカラーの源泉として「体」$\mathbb{F}$ というものを使うのが普通．定義は以下のとおり．

Defn. 非空集合 $\mathbb{F}$ において (二値の) 加法と乗法の演算が定義され，次の (FA)，(FM), (FD) が成り立つとき，$\mathbb{F}$ を**体 (field)** という．任意の $x, y, z \in \mathbb{F}$ を取る．

加法の公理：

FA.1 $x, y \in \mathbb{F} \implies (x+y) \in \mathbb{F}$

FA.2 $x+y = y+x$

FA.3 $(x+y)+z = x+(y+z)$

FA.4 $\exists x' \in \mathbb{F}, x'+x = x, \forall x \in \mathbb{F}$. 0 で表す．

FA.5 $\exists x' \in x', x'+x = 0$. $-x$ で表す．

LA の枠組み：スカラーの公理 2

乗法と分配法則の公理：

FM.1 $x, y \in \mathbb{F} \implies xy \in \mathbb{F}$

FM.2 $xy = yx$

FM.3 $(xy)z = x(yz)$

FM.4 $\exists\, x' \in \mathbb{F}, x'x = x, \forall\, x \in \mathbb{F}$. 1 で表す.

FM.5 $\exists\, x' \in x', x'x = 1$. $1/x$ で表す.

FD.1 $x(y + z) = xy + xz$

(*) 普通の演算が定義された $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は体である.

LA の枠組み：ベクトルの公理 1

スカラー源となる $\mathbb{F}$ はできた．次はベクトルを元とする集合 V の約束．

Defn. 上記の体を所与として，非空集合 V において，スカラーとベクトルの積，またベクトルの加法という演算が定義され，次の (VA),(VM),(VD) が成り立つとき，V を **(線型) ベクトル空間 (vector space)** という． 任意の $u, v, w \in V, \alpha, \beta, 0, 1 \in \mathbb{F}$ を取る．

ベクトルの加法公理：

VA.1 $u + v = v + u \in V$

VA.2 $(u + v) + w = u + (v + w)$

VA.3 $\exists\, \theta \in V, \theta + u = u, \forall\, u \in V$

VA.4 $\exists\, u' \in V, u + u' = \theta, \forall\, u \in V$. $-u$ で表す.

註 (用語について)：英語では，昔は linear space と呼ぶのが主流だったようだが，90 年代以降の書物では vector space が頻見.
この資料 (日本語版) では文字数の少ない線型空間と呼ぶ.

LA の枠組み：ベクトルの公理 2

ベクトルとスカラーの積と分配法則の公理：

VM.1 $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) \in V$

VM.2 $0u = \theta, \forall\, u \in V$

VM.3 $1u = u, \forall\, u \in V$

VD.1 $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

VD.2 $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

普段は集合を問わず加法単位元を 0 で表すので，$\theta = 0$ と記す．

これからの理論に向けて，下ごしらえは以上である．

基本的な性質を見る

(*) 共通の体 $\mathbb{F}$ をもつ $U_1, \ldots, U_n$ を線型空間とおく．普通のデカルト積 (積集合) の $U_1 \times \cdots \times U_n$ が線型空間であることを確認せよ．

(*) 以下の性質は V の公理より証明できる．

VM.4 $\alpha 0 = 0$

VD.3 $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

VD.4 $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

VC.1 $x + y = y + z \implies x = z$

VC.2 $\alpha \neq 0, \alpha x = \alpha y \implies x = y$

VC.3 $x \neq 0, \alpha x = \beta x \implies \alpha = \beta$

VM.5 $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

VM.6 $xy = 0 \implies x = 0$ or $y = 0$

(*) 線型空間 V では，加法単位元は唯一つ存在する．乗法の単位元についても同様である．

部分空間

線型空間の部分集合はいくらでもあるが，特に大事なのは以下の一種.

Defn. V を体 $\mathbb{F}$ の上での線型空間とする．$X \subseteq V$ を取り，

$$u + v \in X$$
$$\alpha u \in X$$

$\forall\, u, v \in X, \alpha \in \mathbb{F}$ が成り立つとき，X を V の**部分空間 (subspace)** という.

つまり，部分空間はベクトルの足し算とスカラー倍について閉じている部分集合にほかならない.

(*) $X \subseteq V$ は部分空間である．$\iff$ X は線型空間である.

いくつか代表的な事例

Example. (*) お馴染みの普通の演算を想定したとき，以下はすべて線型空間である．

- $\mathbb{F}^n$ と $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \ldots\}$, given field $\mathbb{F}$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{F}) = \{p : p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m\}$, given field $\mathbb{F}$, and coefficients $\alpha \in \mathbb{F}^m, m \geq 1$.
- $\{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : x_n \to 0\}$
- $\{f : [a, b] \to \mathbb{R}; f$ continuous on $[a, b]\}$.

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

和空間と直和

Defn. 線型空間 V の部分集合 $U_1, \ldots, U_n \subset X$ を取る．これらの**和空間 (sum)** を次のように定める．

$$U_1 + \cdots + U_n := \{u_1 + \cdots + u_n : u_i \in U_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

任意の $z \in V$ について以下の形式

$$z = u_1 + \cdots + u_n, \text{ where } u_i \in U_i, 1 \leq i \leq n$$

が一意に決まるならば $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ と表し，これらの U_i が**直和 (direct sum)** を成すという．

どのような (集合の) 演算が線型性を保持する？

ある和空間を与えられたとき，どのような条件を充たせばそれが直和になるのだろうか？

和空間の基本的な性質

線型空間 V の部分集合 $U, W, U_1, \ldots, U_n \subset V$ を取る.
(*) そのとき,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \iff U_1 + \cdots + U_n = V$$
$$\text{and } 0 = u_1 + \cdots + u_n \text{ uniquely } u_i = 0.$$

(*) これにより，以下の有用な系を得ることができる.

$$V = U \oplus W \iff V = U + W \text{ and } U \cap W = \{0\}.$$

(**) 幸いにも，和空間と共通部分を取っても線型性は保たれる.
つまり,

$$U + W \text{ and } U \cap W \text{ は部分空間である.}$$

(*) この結果は，二つの集合に限らず，任意の和と共通部分に対しても，容易に拡張できる.
(*) しかし，集合の合併 (unions) が線型性を保つ保障はない.
(*) 任意の部分空間 $U, W \subset V$ は $[U \cup W] = U + W$ を充たす (次スライドを既知とす).

ベクトルの線型結合など

Defn. $\mathbb{F}$ 上の線型空間 V 任意の $m \geq 1$ の元 $x_1, \ldots, x_m \in V$ と m 個のスカラー $\alpha \in \mathbb{F}^m$ を取り,

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$$

をこれらの元の**線型結合 (linear combination)** という.

(*) 注意：二値の加法しか定義してこなかったが，公理により曖昧さがないことは確認できる.

(*) $S \subset V$ が部分空間ならば，S は線型結合について閉じている.

ベクトルの線型結合など

Defn. 部分集合 $T \subset V$ について，以下の

$$[T] := \{T \text{ の元によるすべての線型結合}\}$$

を T から**生成される部分空間 (subspace generated by** T**)**，あるいは T によって張られる部分空間 (span) という．

(*) この名付け方の妥当性を確認せよ．$[T]$ は T を含む V の「もっとも小さい」部分空間である．

線型空間の (平行) 移動 1

Example. 以下のように定めた超平面 $H \subset \mathbb{R}^n$ を考える.

$$H = \{x : \alpha^T x = b\}, b \neq 0.$$

(*) もちろん一次式によって定まるが，線型空間ではない.

Defn. 部分集合 $W \subset V$ から任意の 2 点を取り，その 2 点を通るすべての線が W に含まれるときにこれを**アフィン (affine)** という． 明記すると，$u, v \in W$ について,

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

線型空間の (平行) 移動 2

Defn. $T \subset V$ の**アフィン包 (affine hull)** は

$$\operatorname{aff} T := \cap W_i$$

と定義される．なお，$T \subset W_i$ を充たすすべての $W_i \subset V$ の上に共通部分を取る．

(*) この名付け方の妥当性を確認せよ．$\operatorname{aff} T$ は常に定まり，またアフィンである．
(*) 任意のアフィン集合は，ある部分空間を平行移動させたものである．

線型従属性，次元，基底

線型空間を特徴づけるもっとも重要な概念.
V が $\mathbb{F}$ 上の線型空間とする.

Defn. 非空の $S \subset V$ を取る．ある元 $x \in V$ が S に対して**線型従属 (linearly dependent)** であるとは，x が S の元の線型結合によって表せることをいう．同じく，

$$x \text{ が } S \text{ に対して線型従属} \iff x \in [S].$$

線型従属でない場合は，x は S に対して**線型独立 (linearly independent)** であるという．かくて集合 $S \subset V$ が**線型独立** (集合) というのは，次の条件が充たされるときである.

$$u \text{ が } S \setminus \{u\} \text{ に対して線型独立}, \forall u \in S.$$

(*) 有限集合 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$ の場合，次の事実は大変有用である.

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \text{ が線型独立} \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \text{ ならば} \alpha_i = 0 \text{ というとき.}$$

線型従属性，次元，基底

Defn. 線型空間 V が**有限次元 (finite dimensional)** であるとは，
有限 部分集合 $B \subset V$ が存在し，$[B] = V$ が成り立つことをいう．
存在しない場合は，V を **無限次元 (infinite-dimensional)** という．

B が線型独立ならば，B を V の**基底 (basis)** という．

(*) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が V の基底ならば，任意の $v \in V$ の以下の形式は一意に定まる．

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

(*) 実際，上記の式が一意に決まることは $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が基底であるための必要十分条件.

基底は必ず存在するのだろうか？
その大きさ $|B|$ について確かなことはいえるか？
「次元」の概念にはある種の単調性をもたせることができるか？

線型従属性，次元，基底

(**) 次の結果はきわめて重要であり，多少の労力を投じると証明できる．

V を有限次元線型空間とする．そのとき，

- V の基底 $B \subset V$ は必ず存在する．
- B, C が V の基底ならば，$|B| = |C|$.
- $S \subset V$ が部分空間 $\implies$ S は有限次元.
- $S \subset V$ が部分空間 $\implies$ それぞれの基底は $|B_S| \leq |B_V|$.

この一連の結果こそが普通の次元の定義を動機づけている

線型従属性，次元，基底

Defn. V を有限次元線型空間とおく．V の**次元 (dimension)** を $\dim V := |B|$ と定義する (B は任意の基底).
V が無限次元の場合，$\dim V := \infty$ とし，$V = \{0\}$ ならば $\dim V = 0$ とする．

(*) 当然望まれる単調性はこれで獲得できた．つまり，$S \subset V$ が部分空間ならば,

$$\dim S \leq \dim V.$$

また，$\dim V = n$ さえ知っていれば，任意の $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ が基底であるか否か判定するには，あと一つだけ確認すれば良い：

$$[\{v_1, \ldots, v_n\}] = V \implies \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ が } V \text{ の基底}$$
$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ は線型独立} \implies \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ は } V \text{ の基底}$$

線型従属性，次元，基底

$S, T, U, U_1, \ldots, U_n \subset V$ を部分空間とし，また $\dim V < \infty$ とする．

(**) 次元は以下の良い性質をもっている．

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$
$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) \leq \dim U_1 + \cdots + \dim U_n.$$

(*) 残念ながら，期待に反して以下の等式は一般には成り立たない．

$$\begin{aligned}\dim(S+T+U) = {} & \dim S + \dim T + \dim U - \dim(S \cap T) \\ & - \dim(S \cap U) - \dim(T \cap U) + \dim(S \cap T \cap U).\end{aligned}$$

線型従属性，次元，基底

我々が定義した次元を使って，線型空間 $V(\dim V < \infty)$ の「構造」について色々と論じることができる．

(*) 線型空間 V, $\dim V = n$ には，以下を充たす 1 次元部分空間 $V_1, \ldots, V_n$ が存在する．

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

(*) さらに，$S \subset V$ が部分空間ならば，

$$\dim S = \dim V \implies S = V.$$

(**) 部分空間 $U_1, \ldots, U_n \subset V$ を取り，

$$V = U_1 + \cdots + U_n \text{ and } \dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim U_i \iff V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

これもまたやや少しの努力で証明できるものである．

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. <u>線型空間の性質と構造</u>
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

解析のちょっとした復習

数学では線型空間が至るところに出没．代表的な事例を紹介するとともに，解析と LA の接点を確認しよう．

Defn. 集合 X において，対応 $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ が任意の $x, y, z \in X$ に対して以下を充たす場合，d を**計量 (metric)** という．

M.1 $d(x, y) \geq 0$．また，等式が成り立つ $\iff$ $x = y$

M.2 $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

M.3 $d(x, y) = d(y, x)$

計量 d を備えた X を**計量空間 (metric space)** という．

(**) 以下はすべて計量空間である．

- $\mathbb{R}^n$ with $d(x, y) := (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$
- $\mathbb{R}^n$ with $d(x, y) := \max_i |x_i - y_i|$
- $\mathcal{C}[a, b]$ with $d(f, g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$
- $d(f, g) := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$, f, g が $[a, b] \subset \mathbb{R}$ において有界.

解析のちょっとした復習

Defn. 計量空間 X では，中心 x_0 半径 ε の球を

$$\varepsilon B(x_0) := \{x \in V : d(x, x_0) < \epsilon\}$$

と表す．また $S \subset X$ の元 u について，$\exists \varepsilon > 0$,

$$\varepsilon B(u) \subset S$$

が成り立つ場合，点 u を S の**内点 (interior point)** という．
すべての内点を $\mathrm{int}\, S$ と表し，S の**内部 (interior)** という．もし $S = \mathrm{int}\, S$ ならば，S は X の部分集合として**開 (open)** である．

ここでは，$p_0 \in V$ が $S \subset V$ の**集積点 (limit point)** であるとは，次の条件が充たされることをいう．$\forall \delta > 0$,

$$\exists x \in S, x \neq p_0, \text{ s.t. } x \in \delta B(p_0).$$

S の集積点の全体を S^* で表すとき，$\overline{S} := S \cup S^*$ を S の**閉包 (closure)** という．$S = \overline{S}$ ならば，S は X の部分集合として**閉 (closed)** であるという．

線型空間の要素の「長さ」を考察

Defn. 体 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の上の線型空間 V では，対応 $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ が以下をすべて充たすとき，***ノルム***という．$\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{F}$,

N.1 $\|u\| > 0$ for $u \neq 0$, and $\|0\| = 0$.

N.2 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

N.3 $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

ノルムを備えた V を***ノルム線型空間* (normed linear space)** という．

(*) V でノルムさえあれば計量・距離尺度も自ずと定まる．
(*) 逆はどうか？　ある種の “reverse indicator” を考えてみると良い．
(*) $\mathcal{C}[a, b]$ with $\|f\| := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ はノルム線型空間．

線型空間での「収束」

ごく自然な拡張．$(X, \|\cdot\|)$ をノルム付きの線型空間とし，(x_n) をベクトルの列 $x_1, x_2, \ldots \in X$ とする．

Defn. 列 (x_n) がノルム $\|\cdot\|$ でもって $x \in X$ に**収束する (converges)** とは，$x_n \to x$ と表して，

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \text{ のことをいう．}$$

もちろん $(\|x_n - x\|)$ はお馴染みの実数値の数列.

(*) 収束する列の収束値 (収束する元) は唯一つ.
(*) $S \subset X$ が閉集合 $\iff$ S の元から成る列 (x_n) がすべて S の元に収束する.

線型空間での写像の連続性

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を線型空間とする．関数の連続性も自然に定義できる．

Defn. $f : X \to Y$ が $x_0 \in X$ で**連続 (continuous)** であるとは，
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t.

$$\|x - x_0\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$$ のことをいう．

明らかなようにそれぞれのノルムには依存する．

(*) f が x_0 において連続 $\iff$ $x_n \to x_0$ ならば $f(x_n) \to f(x_0)$.

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

バナッハ空間

Defn. 列 (x_n) を**コーシー列 (Cauchy sequence)** というのは,
$\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,N_0 < \infty$ s.t.

$$m, n \geq N_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{のことをいう.}$$

X におけるすべてのコーシー列が収束するとき，X が**完備 (complete)** であるという． 完備なノルム線型空間を**バナッハ空間 (Banach space)** という．

バナッハ空間の最大の利点はこの「コーシー条件」であろう．

(*) コーシー列は ($\|\cdot\|$ について) 有界である．
(*) 収束する列はすべてコーシー列である．
(*) $\mathcal{C}[a,b]$ with $\|f\| := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ はバナッハ空間.
(**) $\mathcal{C}[a,b]$ with $\|f\| := \int_a^b |f(x)|\,dx$ はバナッハ空間ではない.

バナッハ空間についてさらに

(*) X, Y がバナッハならば，普通のノルム付き積空間 $(X \times Y, \|\cdot\|)$，$\|\cdot\| := \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$ もバナッハ.

(*) X がバナッハ空間とする．$S \subset X$ が完備 $\iff$ S が閉の部分集合

(**) もう一つ有用な結果：X がノルム持ちの線型空間のとき，$S \subseteq X$ を取り，

$$\dim S < \infty \implies S \text{ は完備である.}$$

例：ℓ_p 空間，$1 \leq p \leq \infty$

ここで古典的なバナッハ空間を紹介する．

Defn. ℓ_p **空間** ($1 \leq p < \infty$) を以下のように定義する．

$$\ell_p := \left\{ (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

ここで使うノルムは案の定，$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

また $p = \infty$ の場合，有界列のみを対象とし，ノルムを
$\|x\|_\infty := \sup |x_i|$ と定める．

列：$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ 空間，$1 \le p \le \infty$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ を確率空間とする．

Defn. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ 上の L_p **空間** $(1 \le p < \infty)$ を

$$L_p := \left\{ h : \mathbf{E}\,|h|^p = \int_\Omega |h(\omega)|^p \; \mathbf{P}(d\omega) < \infty \right\}$$

と定義し，ノルムを $\|h\|_p := (\mathbf{E}\,|h|^p)^{1/p}$ と定める．

前と同様に，$p = \infty$ のときは有界関数 $\sup_\omega |h(\omega)| < \infty$ を対象に．

しかし，難点あり...

$g, h \in L_p$ が $g \neq h$ であっても，$g = h$ a.e. $[\mathbf{P}]$ は当然ありうる．

(*) ルベーグ積分に馴染みのある学生：ノルム候補としてなぜ $\|h\|_\infty = \sup_\omega |h(\omega)|$ が不適なのか．代替物を考えると良い．

ℓ_p も L_p もバナッハである

丁寧な証明は本講義の目的からそれるが，解析に関心のある学生ならば確認は必須.

おおむねの流れ (ℓ の場合)：

(1) $1/p+1/q=1$ を充たす p,q と $x\in\ell_p, y\in\ell_q$ を取り，ヘルダー (Hölder) の不等式を証明．つまり,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|\leq\|x\|_p\|y\|_q.$$

(2) これを使って，$x,y\in\ell_p$ を取ってミンコフスキー (Minkowski) の不等式,

$$x+y\in\ell_p \text{ and } \|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p,$$

を入手すると，いわゆる「三角不等式」が得られる．ノルムの定値性は ℓ_p では簡単で，L_p だとやや細かくなる.

(3) 最後に完備性の確認だけ．ℓ_p は初級の解析で十分．L_p だとルベーグ理論が要される.

内積とヒルベルト空間

体 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の上で線型空間 V を考える．

Defn. 以下の条件を充たす $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ を**内積 (inner product)** という． $\forall u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{F}$,

IP.1 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

IP.2 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

IP.3 $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$

IP.4 $\langle u, u \rangle \geq 0$, and $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

(*) 加法性は実はどの引数 (argument) でも成立． また,
$\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$.

(**) 後ほど (第四回), 内積が一般の V においてノルムを生成することを見る．

Defn. 例によって $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を**内積空間 (inner product space)** という． 完備性をもつ内積空間を**ヒルベルト空間 (Hilbert space)** という． 詳細は第四回．

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3.
4. 線型空間の上での解析
5. いくつか重要な空間

講義内容

1. 線型代数の基本的な枠組み
2. 線型空間の性質と構造
3. 線型空間の上での解析
4. いくつか重要な空間

References

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2nd edition.

Luenberger, D. G. (1968). *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley.

Mendelson, B. (1990). *Introduction to Topology*. Dover, 3rd edition.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition.

Spivak, M. (1965). *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley.